MÉCANIQUE DU SOLIDE

Appliquer le P.F.D.

4

1 - CHAMP D'APPLICATION, HYPOTHESES ET CONDITIONS DE RÉSOLUTION

Champ d'application

La **dynamique** est l'étude des relations entre le mouvement d'un solide (vitesse, accélération) et les actions mécaniques agissant sur ce solide qui engendre ce mouvement. Son principe fondamental permet de déterminer des actions mécaniques en prenant en compte les effets de l'inertie des masses en mouvement ; ou l'inverse si la problématique l'exige.

HYPOTHESES :

H0 Cadre de la mécanique classique : systèmes matériels dont la vitesse *v* est faible face à celle de la lumière *c* : ($v < 0{,}6 \,.\, c$).
H1 Les systèmes matériels possèdent une masse concentrée en leur centre de gravité (et souvent considérée constante).
H2 Le repère absolu utilisé pour le référentiel est Galiléen.

Conditions de résolution (dans un objectif classique = trouver des inconnues d'effort) :

La résolution de problème de dynamique est possible et complète si :

- On ne dépasse pas **6 inconnues** algébriques d'effort au maximum pour 6 équations de résolutions exploitables.
  Rmq : des équations géométriques peuvent venir s'ajouter pour augmenter cette limite de 6 inconnues maximum.
- Les inconnues liées à la problématique sont déterminées grâce au P.F.D.

2 - ÉNONCÉ DU P.F.D.

Forme torsorielle condensée

$$\sum {}_{G}\left\{ T_{ext/S} \right\}_{R} = {}_{G}\left\{ Td \right\}_{R}$$

Forme torsorielle détaillée

$$\sum {}_{G}\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{F_{ext/S}} \\ \overrightarrow{M_{G\,ext/S}} \end{matrix} \right\}_{R} = {}_{G}\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{Rd} \\ \overrightarrow{Md_G} \end{matrix} \right\}_{R}$$

Rmq 1 et 2 **Rmq 3**

Forme vectorielle

$$\sum \overrightarrow{F_{ext/S}} = \overrightarrow{Rd}$$
$$\sum \overrightarrow{M_{G\,ext/S}} = \overrightarrow{Md_G}$$

Avec :

$\{T_{ext/S}\}$:	Torseurs des **A.M.E.** agissant sur le solide isolé	$\{Td\}$:	Torseur dynamique traduisant les effets de l'inertie
$\overrightarrow{F_{ext/S}}$:	Forces extérieures agissant sur le solide isolé (*N*)	$\overrightarrow{Rd}$:	Résultante dynamique (*N*) (voir page suivante)
$\overrightarrow{M_{G\,ext/S}}$:	Moments extérieurs en G agissant sur le solide isolé (*N.m*)	$\overrightarrow{Md_G}$:	Moment dynamique en G (*N.m*) (voir page suivante)

PRÉCAUTIONS A PRENDRE AVANT DE POSER LES ÉQUATIONS DE RÉSOLUTION

Rmq 1 : Le point choisi est prioritairement le centre de gravité **G** du solide isolé :
⇨ Il faut réduire en cet unique point **G** <u>tous</u> les $\{T\}$.
⇨ Le $\{Td\}$ est normalement déjà réduit en **G** au départ de l'étude.

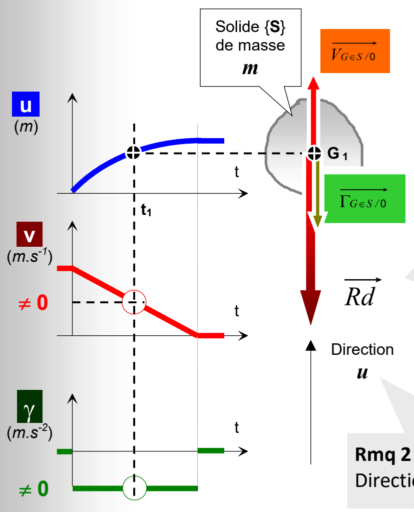
Rmq 2 : On peut être amené à choisir un point différent du centre de gravité **G** : **A** par exemple.
⇨ Il faut réduire en cet unique point **A** choisi <u>tous</u> les $\{T\}$.
⇨ Le $\{Td\}$ qui est normalement réduit en **G** et doit donc être lui aussi réduit en **A**.

Rmq 3 : Tous les $\{T\}$ doivent être dans le même repère **R** sinon :
⇨ Il faut projeter chaque résultante et chaque moment dans un repère **R** en commun.

3 – RÉSULTANTE DYNAMIQUE

Translation rectiligne
suivant une direction **u**

$$\overrightarrow{Rd} = m \, . \, \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}}$$

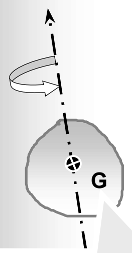


Rmq 1 :
En statique ou
à vitesse constante
$\overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}} = \vec{0}$
$\overrightarrow{Rd} = \vec{0}$
⇨
le P.F.D. devient P.F.S.

Rmq 2 :
Direction pouvant être x, y ou z

Rotation sur un axe
G est sur l'axe de rotation

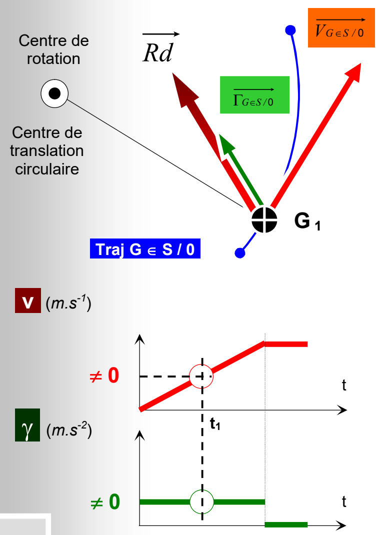
$$\overrightarrow{Rd} = \vec{0}$$
car
$$\overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}} = \vec{0}$$



Rmq :
G est immobile donc pas d'accélération

Rotation sur un axe, G décalé
ou
Translation circulaire

$$\overrightarrow{Rd} = m \, . \, \overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}}$$



Rappel $\overrightarrow{\Gamma_{G \in S/0}}$: Vecteur accélération du centre de gravité **G**

4 – MOMENT DYNAMIQUE

Cas général :

$$\overrightarrow{Md_G} = \overline{\overline{I_G}} \, . \, \overrightarrow{\alpha_{S/0}} = \begin{bmatrix} L_{Gxx} & L_{Gxy} & L_{Gxz} \\ L_{Gyx} & L_{Gyy} & L_{Gyz} \\ L_{Gzx} & L_{Gzy} & L_{Gzz} \end{bmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{vmatrix}$$

Rmq 1

Avec $\overline{\overline{I_G}}$: Matrice d'inertie contenant des moments d'inertie (L_{Gxx} ; L_{Gyy} ; L_{Gzz} ; L_{Gxy} ...) *(kg . m²)*

$\overrightarrow{\alpha_{S/0}}$: Vecteur rotation angulaire contenant les accélérations angulaires possibles sur chaque axe (α_x ; α_y ; α_z) *(rad.s^{-2})*

Rmq 1 : Les valeurs contenues dans la matrice d'inertie peut être donnée par un modeleur volumique.
Les moments d'inertie peuvent être notés I_{Gx}, I_{Gy}, I_{Gxy} ... ou bien J_{Gx}, J_{Gy}, J_{Gxy} ...

Cas particulier de rotation sur un axe unique :

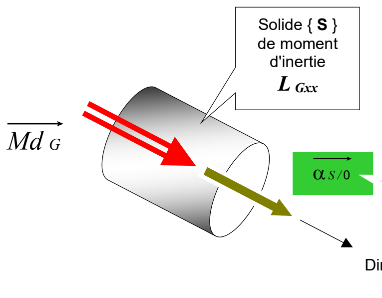
Dans ce cas de rotation sur un seul axe :
- Seul les L_{Gxx} ; L_{Gyy} ; L_{Gzz} situé dans la diagonale de la matrice sont utiles
- Seule l'accélération angulaire sur l'axe de la rotation est non nulle.

Pour une rotation autour de x par exemple :

⇨ $\overline{\overline{I_G}} \Leftrightarrow L_{Gxx}$

⇨ $\overrightarrow{\alpha_{S/0}} = \alpha_x \, . \, \vec{x}$

$$\overrightarrow{Md_G} = L_{Gxx} \, . \, \alpha_x \, . \, \vec{x} = \begin{vmatrix} L_{Gxx} . \alpha_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$



Rmq 2 :
En statique ou à vitesse constante
$\overrightarrow{\alpha_{S/0}} = \vec{0}$
$\overrightarrow{Md_G} = \vec{0}$
⇨
le P.F.D. devient P.F.S.